EPREUVE PRATIQUE DE MATHEMATIQUES

Durée : 3 heures
(Note sur 20)

---

*L'épreuve comporte deux parties indépendantes qui devront être rédigées sur 2 copies séparées : **copie 1**, pour la **première partie** ; **copie 2** pour la **deuxième partie**. Chaque feuille devra comporter l'indication claire "**copie 1**" ou "**copie 2**" puisque les feuilles relatives à chacune des parties seront ramassées séparément.*

PREMIERE PARTIE

(Note sur 5)

La durée conseillée pour cette partie est de 45 minutes

Le problème traite de la multiplication de deux polynômes à coefficients entiers. Pour représenter un polynôme $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, de degré n, $0 \le n \le 100$, avec $a_i \in \mathbb{Z}$, on utilisera une variable du type suivant :

```
const NMAX = 100 ;
type poly = array[-1,NMAX] of integer ;
var P : poly ;
```

avec P[-1] = n, P[i] = a_i si $0 \le i \le n$.

Question 1 :

(a) Ecrire une procédure PASCAL qui calcule le produit R de deux polynômes $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ et $Q = \sum_{i=0}^{p} b_i X^i$ à coefficients entiers, de degrés respectifs n et p. On précisera les choix faits dans les cas d'erreur.

(b) Déterminer en fonction de n et de p le nombre d'additions $A_1(n,p)$ et le nombre de multiplications $M_1(n,p)$ (faisant intervenir les coefficients des polynômes P et Q) qu'effectue votre procédure.

Question 2 :

On suppose dans cette question que $n = 2m-1$, $m \ge 2$. On considère deux polynômes $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ et $Q = \sum_{i=0}^{n} b_i X^i$ à coefficients entiers de degré n, que l'on écrit sous la forme

$$P = P_1 X^m + P_2,\ Q = Q_1 X^m + Q_2,$$

Tournez la page S.V.P.

où P_1, P_2, Q_1 et Q_2 sont des polynômes à coefficients entiers de degré $\leq m-1$. On note R le produit de P et Q : $R = \sum_{i=0}^{2n} c_i X^i$

(a) Vérifier la relation $R = R_1 X^{2m} + R_4 X^m + R_2$, où on a posé $R_1 = P_1 Q_1$, $R_2 = P_2 Q_2$, $R_3 = (P_1+P_2)(Q_1+Q_2)$, et $R_4 = R_3 - R_1 - R_2$.

(b) Exprimer la valeur de c_i en fonction des coefficients de R_1, R_2 et R_4 (on notera u_i, v_i et w_i les coefficients de R_1, R_2 et R_4, respectivement).

(c) En déduire une procédure PASCAL qui calcule le produit de P et Q. On utilisera la procédure de la question 1 pour calculer R_1, R_2 et R_3.

(d) Déterminer en fonction de n le nombre d'additions $A_2(n)$ et le nombre de multiplications $M_2(n)$ (faisant intervenir les coefficients des polynômes P et Q) qu'effectue votre procédure.

Question 3 :

(a) On suppose que le coût d'une multiplication est celui de trois additions. Pour quelles valeurs (impaires) de n la méthode de la question 2 est-elle meilleure que celle de la question 1 ?

(b) Comment utiliser la méthode de la question 2 avec n pair ? Si on suppose encore que le coût d'une multiplication est celui de trois additions, pour quelles valeurs paires de n la méthode de la question 2 est-elle meilleure que celle de la question 1 ?

(c) Comment utiliser la méthode de la question 2 avec des polynômes de degrés différents ?

(d) Est-il possible de diminuer encore le nombre d'additions et le nombre de multiplications pour calculer le produit de deux polynômes de degré n ?

A SUIVRE

DEUXIEME PARTIE (Note sur 15)

0 - Introduction et Notations

L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni des normes :

$$(0.1)\quad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty = \max \{ |x_i| , 1 \le i \le n \}.$$

On note M_n l'espace vectoriel des matrices à coefficients dans $\mathbb{R}$, à n lignes et n colonnes. Soit $B \in M_n$ et soit b_{ik} le coefficient situé à l'intersection de la $i^{ème}$ ligne et de la $k^{ième}$ colonne de B.

On note :

$$(0.2)\quad \|B\|_\infty = \max \left\{ \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| , \quad 1 \le i \le n \right\}.$$

On admet sans démonstration que $\| \ \|_\infty$ définit une norme sur M_n et que

$$(0.3)\quad \forall B \in M_n , \forall x \in \mathbb{R}^n , \ \|Bx\|_\infty \le \|B\|_\infty \|x\|_\infty$$

$$(0.4)\quad \forall B_1 \in M_n , \forall B_2 \in M_n , \ \|B_1 B_2\|_\infty \le \|B_1\|_\infty \|B_2\|_\infty$$

L'objet de ce problème est d'étudier l'approximation numérique du problème suivant :

$$(0.5)\quad -u'' + bu = f \ , 0 < x < 1$$

$$(0.6)\quad u(0) = u(1) = 0$$

appelé problème de Dirichlet homogène, où $b \in \mathbb{R}$, avec $b \ge 0$.
On suppose dans la suite que $f \in C^\infty [0,1]$ et on admet que le problème **(0.5) (0.6)** admet une solution unique $u \in C^\infty [0,1]$.

On admet sans démonstration le résultat classique suivant :
Les valeurs propres d'une matrice $B \in M_n$ appartiennent à l'union des disques D_i, $1 \le i \le n$, de centre b_{ii} et de rayon $\sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} |b_{ij}|$.

Pour résoudre numériquement le problème **(0.5), (0.6)**, on découpe l'intervalle [0,1] en I intervalles de longueur h. On pose $x_i = ih$, $0 \le i \le I$.
On définit la suite $\{u_j\}_{j=0}^{I}$ par

$$(0.7)\quad -\frac{1}{h^2} (u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) + bu_j = f_j \qquad , 1 \le j \le I-1$$

$$(0.8)\quad u_0 = u_I = 0$$

où f_j est une approximation appropriée de $f(x_j)$.
On étudie ici certaines propriétés de la solution du problème approché **(0.7), (0.8)**, en particulier, la dépendance continue de la solution approchée $\{u_j\}$ par rapport aux données $\{f_j\}$ et l'erreur numérique $u_j - u(x_j)$ mesurée par les normes $\| \ \|_e$ et $\| \ \|_\infty$, définies par

$$\|V\|_e = \left(h \sum_{j=1}^{I-1} v_j^2 \right)^{1/2} \qquad \|V\|_\infty = \max \{|v_j| ; \ 1 \le j \le I-1\}$$

pour tout vecteur $V = {}^t(v_1, v_2, ..., v_{I-1})$

Le dernier paragraphe est consacré à des expériences numériques en utilisant la méthode **(0.7), (0.8)**.

Tournez la page S.V.P.

1 - Etude de la solution approchée

Q1.1. Ecrire le problème **(0.6)**, **(0.7)** sous la forme d'un système linéaire

(1.1) $A\mathbf{U} = h^2F$

où F est le vecteur ${}^t(f_1, ..., f_{I-1})$, où $\mathbf{U} = {}^t(u_1, ..., u_{I-1})$ et où A est une matrice à I-1 lignes et I-1 colonnes à déterminer.

Q1.2. On suppose $b > 0$. Trouver un domaine contenant les valeurs propres de la matrice A. En déduire que A est inversible.
On suppose maintenant que $b = 0$, montrer que zéro n'est pas valeur propre de la matrice A et en déduire que la matrice A est inversible.

Q1.3. On suppose que $b > 0$. Soit j_0 un indice tel que $u_{j_0} = \max\{u_i ; 0 \le i \le I\}$.
Montrer que si j_0 est différent de zéro et de I, on a $u_{j_0} \le \frac{1}{b} f_{j_0}$.
En déduire que

$$\max\{u_j ; 0 \le j \le I\} \le \max\left\{0, \frac{1}{b} \max\{f_i , \quad 1 \le i \le I-1\}\right\}.$$

Montrer de même que

$$\min\{u_j ; 0 \le j \le I\} \ge \min\left\{0, \frac{1}{b} \min\{f_i , \quad 1 \le i \le I-1\}\right\}.$$

En déduire que

$$\max\{|u_j| ; 0 \le j \le I\} \le \frac{1}{b} \max\{|f_j| ; 1 \le j \le I-1\}).$$

Pour obtenir des renseignements sur la solution approchée $\mathbf{U}$ lorsque $b = 0$, on admet le résultat suivant (Inégalité de Poincaré) :

Pour toute suite $\{v_i\}$, $0 \le i \le I$, telle que $v_0 = 0$, on a

$$h \sum_{i=0}^{I} v_i^2 \le \max\{v_j^2 ; 0 \le j \le I\} \le h \sum_{i=0}^{I-1} \left(\frac{v_{i+1} - v_i}{h}\right)^2$$

Q1.4. Après avoir vérifié que, pour tout vecteur $W \in \mathbb{R}^{I-1}$, on a

${}^tW\,AW = \sum_{i=1}^{I-2} (w_{i+1} - w_i)^2 + w_1^2 + w_{I-1}^2 + bh^2 \sum_{i=1}^{I-1} w_i^2$, où A est la matrice du système linéaire **(1.1)**, montrer que, pour tout $b \ge 0$, on a :

$\| \mathbf{U} \|_e \le c_1 \| F \|_e$, $\| \mathbf{U} \|_\infty \le c_2 \| F \|_e$,

où les constantes c_1 et c_2, dépendant éventuellement de b, sont à déterminer.

Q1.5. Soit A_0 la matrice du système linéaire **(1.1)** lorsque $b = 0$. Vérifier que les coefficients de la matrice A_0^{-1} sont donnés par

$$(A_0^{-1})_{ij} = \frac{i(I - j)}{I}, \text{ pour } 1 \le i \le j \le I - 1.$$

Calculer $\| A_0^{-1} \|_\infty$.
En utilisant la question **Q1.3**, montrer que les coefficients de la matrice A^{-1} sont ≥ 0, pour $b > 0$.
En écrivant $A^{-1} - A_0^{-1} = - A^{-1} (A - A_0) A_0^{-1}$, montrer que $\| A^{-1} \|_\infty \le \| A_0^{-1} \|_\infty$.
En déduire, pour $b \ge 0$, la majoration $\| \mathbf{U} \|_\infty \le c_3 \| F \|_\infty$ où c_3 est une constante, indépendante de I, à évaluer.

A SUIVRE

2 - Majorations d'erreur pour le problème de Dirichlet

On suppose dans toute cette partie que b = 0. On suppose que l'approximation f_j de $f(x_j)$ est donnée par

(2.1) $f_j = \alpha\,(f(x_{j-1}) + f(x_{j+1})) + (1 - 2\alpha)\, f(x_j)$, $1 \le j \le I-1$

où α est un paramètre à choisir.

Soit u la solution du problème **(0.5)**, **(0.6)**, on pose

$E_i = \frac{1}{h^2}(u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})) + \alpha\,(f(x_{i+1}) + f(x_{i-1})) + (1 - 2\alpha)\, f(x_i)$.

Soit $M_k = \max\left\{\left|\frac{d^k u}{dx^k}(x)\right| ;\ 0 \le x \le 1\right\}$, $k \ge 0$.

Q2.1. Montrer que pour $\alpha = 0$, on a :
$\max\{|E_i| ;\ 1 \le i \le I-1\} \le c_4 h^2 M_4$
où la constante c_4 est à évaluer.

Q2.2. Montrer que l'on peut choisir α de telle sorte que :
$\max\{|E_i| ;\ 1 \le i \le I-1\} \le c_5 h^4 M_6$, où la constante c_5 est à évaluer.

Q2.3. On pose $\varepsilon_i = u_i - u(x_i)$, $0 \le i \le I$, où $(u_0, u_1, ..., u_I)$ est la solution du problème **(0.7)**, **(0.8)** et où la fonction $x \to u(x)$ est la solution du problème **(0.5)**, **(0.6)**. Ecrire le système linéaire satisfait par les ε_i , $0 \le i \le I$.

Q2.4. Déduire des questions **Q2.3**, **Q1.4**, et **Q1.5** des majorations pour $\|\varepsilon\|_e$ et pour $\|\varepsilon\|_\infty$, où ε est le vecteur colonne ${}^t(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_{I-1})$, dans le cas où $\alpha = 0$ et dans le cas où α est la valeur trouvée à la question **Q2.2** .

3 - Essais numériques

Dans cette partie, on suppose que b = 0. La solution du problème **(0.7)**,**(0.8)** est donnée par

$$u_j = jh^3 \sum_{\ell=1}^{I-1} \sum_{k=1}^{\ell} f_k \;-\; h^2 \sum_{\ell=1}^{j-1} \sum_{k=1}^{\ell} f_k \quad , \quad 1 \le j \le I$$

$u_0 = 0$.

On suppose que l'approximation f_j de $f(x_j)$ est donnée par la formule **(2.1)**

Q3.1. On s'intéresse à la solution du problème

$$\begin{cases} -u'' = e^x , & 0 < x < 1 , \\ u(0) = u(1) = 0 . \end{cases}$$

On choisit $h = \frac{1}{8}$. Pour les valeurs de $\alpha = 0$, $\frac{1}{14}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{10}$, calculer $E = \max\{|u_j - u(x_j)| ;\ 1 \le j \le 7\}$ avec deux chiffres significatifs.

Présenter les résultats dans un tableau du type suivant :

Tournez la page S.V.P.

α	0	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{10}$
E				

Q3.2. On s'intéresse à la solution du problème

$$\begin{cases} -u'' = -12x^2 + 12x - 2 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

On choisit $h = \frac{1}{2}$.

Pour les différentes valeurs de $\alpha = 0, \frac{1}{14}, \frac{1}{12}, \frac{1}{10}$, calculer u_1 et $u_1 - u(\frac{1}{2})$
Présenter les résultats dans un tableau du type suivant :

α	0	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{10}$
u_1				
$u_1 - u(\frac{1}{2})$				

Reprendre la même question pour $h = \frac{1}{3}$, en calculant u_1 et $u_1 - u(\frac{1}{3})$. Présenter les résultats dans un tableau analogue au précédent. Expliquer les résultats obtenus.

Q3.3. On s'intéresse à la solution du problème

$$\begin{cases} -u'' = 2 + x \quad , \quad 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Pour les valeurs $h = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, évaluer la quantité
$\max \{|u_i - u(x_i)| ; \ 1 \le i \le I - 1\}$. Expliquer les résultats obtenus.

FIN